2) Sea $\Gamma \subset Form$ un conjunto insatisfacible de fórmulas de la lógica proposicional. Demostrar que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Gamma$ tales que $\forall \alpha \in Form$ $\bigvee_{i=1}^{k} (\alpha_i \to \alpha)$ es una tautología.

Γ es un conjunto insatisfacible $\Rightarrow$ por ejercicio 5.7.c "Si Γ es insatisfacible, algún subconjunto finito de Γ es insatisfacible".

$\Rightarrow \exists\ \Gamma'$ finito tal que Γ' subconjunto de Γ y Γ' insatisfacible

Noto: $\Gamma' = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$

• Quiero ver que: $\bigvee_{i=1}^{k} (\neg \alpha_i)$ es una tautología

▷ Como Γ' insatisfacible, ($\forall$ valuación v) $v \not\models \Gamma'$

$\Rightarrow$ ($\forall$ valuación v) $[\exists\, \alpha_i$ tq $v \not\models \alpha_i,\ \alpha_i \in \Gamma']$

por def. semántica de $\neg$

$\Rightarrow$ ($\forall$ valuación v) $[\exists\, \alpha_i$ tq $v \models \neg\alpha_i,\ \alpha_i \in \Gamma']$

por def de $\vee$

$\Rightarrow$ ($\forall$ valuación v) $[v \models \neg\alpha_1 \vee \ldots \vee \neg\alpha_k]$

$\Rightarrow$ ($\forall$ valuación v) $[v \models \bigvee_{i=1}^{k} (\neg\alpha_i)]$

$\Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} (\neg\alpha_i)$ es una tautología.

NOTA

$\triangleright$ Resta ver que: $\bigvee_{i=1}^{k} (\neg \alpha_i)$ tautología $\Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} (\alpha_i \to \alpha)$ tautología. (α)

$\bigvee_{i=1}^{k} (\neg \alpha_i)$ tautología $\Rightarrow$

$(\forall$ valuación $\omega) \left[\omega \models \bigvee_{i=1}^{k} (\neg \alpha_i) \right]$

$\Rightarrow (\forall$ valuación $\omega) [\omega \models \neg \alpha_1 \vee \dots \vee \neg \alpha_k]$

por def. semántica de $\vee$

$\Rightarrow (\forall$ valuación $\omega) [\omega \models \neg \alpha_1$ o $\dots$ o $\omega \models \neg \alpha_k]$

En particular, si $\omega \models \neg \alpha_j \Rightarrow \omega \models \alpha_j \to \alpha \ \forall \alpha$.

Porque $\omega \models \alpha_j \to \alpha \Leftrightarrow \omega \not\models \alpha_j$ o $\omega \models \alpha$

por def semántica de $\neg$

$\Leftrightarrow \omega \models \neg \alpha_j$ o $\omega \models \alpha$

Entonces, vale $\omega \models \neg \alpha_j \Rightarrow \omega \models \neg \alpha_j$ o $\omega \models \alpha \Rightarrow \omega \models \alpha_j \to \alpha$

$\Rightarrow (\forall$ valuación $\omega) [\omega \models \neg \alpha_1 \to \alpha$ o $\dots$ o $\omega \models \neg \alpha_k \to \alpha]$

$\Rightarrow (\forall$ valuación $\omega) [\omega \models \neg \alpha_1 \to \alpha \vee \dots \vee \omega \models \neg \alpha_k \to \alpha]$

$\Rightarrow (\forall$ valuación $\omega) \left[\omega \models \bigvee_{i=1}^{k} (\neg \alpha_i \to \alpha) \right]$

$\Rightarrow \bigvee_{i=1}^{k} (\neg \alpha_i \to \alpha)$ es tautología. $\square$

NOTA